

# קורס קדם במתמטיקה

פרק 42 - וקטורים גיאומטריים

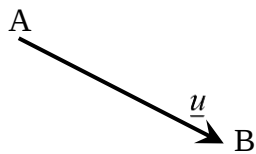
תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים.....1
2. וקטורים הפורשים מישור.....6
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור.....10

## הגדרות וכללים יסודיים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה כללית:



להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא:  $\overrightarrow{AB}$ .

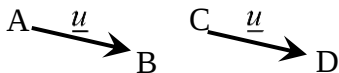
ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא:  $\underline{u}$  (אותיות מקובלות לסימון הן:  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ ).

מהאיור לעיל מתקיים:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ .

#### קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.

דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

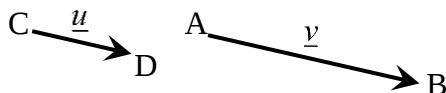


- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.

ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.

ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".

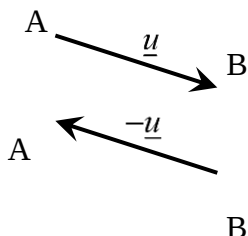
דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:



עבור  $\alpha > 1$  מתקיים:  $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ , או:  $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$ .

- אם זוג ווקטורים במרחב:  $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$  ו-  $\overrightarrow{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$  מקבילים

אז מתקיים:  $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$ .



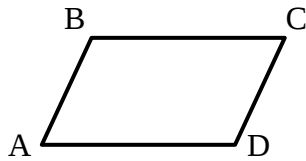
- ווקטור המסומן  $\overrightarrow{BA}$  הוא בעל גודל זהה לווקטור  $\overrightarrow{AB}$

וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים:  $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$ .

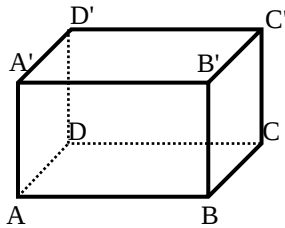
#### הערה:

שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  יקראו מקבילים אם מתקיים:  $\underline{v} = \alpha \underline{u}$  כאשר הגודל  $\alpha$  יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום  $\alpha \neq 0$ . בפרט עבור  $\alpha < 0$  כיוונם הפוך ב-  $180^\circ$ .

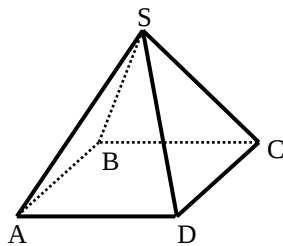
## שאלות:



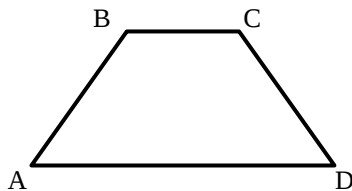
- (1) במקבילית ABCD נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$   
 מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל-  $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



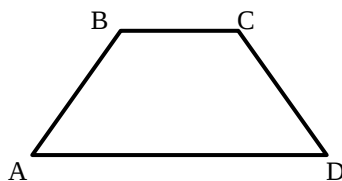
- (2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$   
 מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל-  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .



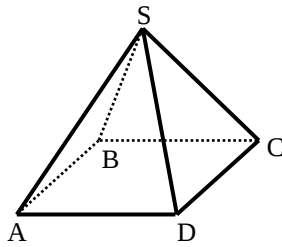
- (3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$   
 מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל-  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .



- (4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$   
 מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות  $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



- (5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$   
 א. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  את הווקטורים  $\overrightarrow{AC}$  ו-  $\overrightarrow{DC}$ .  
 ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  את הווקטור  $\overrightarrow{BE}$ .  
 ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  את הווקטור  $\overrightarrow{AF}$ .



(6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את

הווקטורים  $\overrightarrow{AC}$  ו- $\overrightarrow{SC}$ .

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את הווקטור  $\overrightarrow{BN}$ .

(7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $AP:PB = 2:3$ . נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overrightarrow{AP}$  ו- $\overrightarrow{PB}$ .

(8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $AP:PB = 3:5$ . נתון:  $\overrightarrow{AP} = \underline{u}$ .

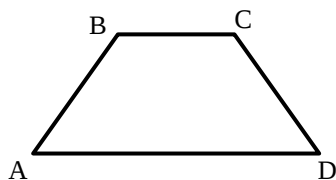
הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overrightarrow{PB}$  ו- $\overrightarrow{AB}$ .

(9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $\frac{AP}{AB} = \alpha$ . נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overrightarrow{AP}$  ו- $\overrightarrow{PB}$ .

(10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $\frac{AP}{PB} = \alpha$ . נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overrightarrow{AP}$  ו- $\overrightarrow{PB}$ .



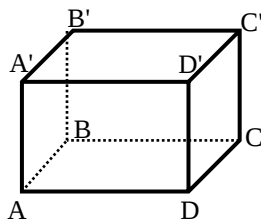
(11) בטרפז ABCD שבשרטוט

נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$ .

הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת:  $\frac{DF}{FC} = \beta$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overrightarrow{AF}$ .

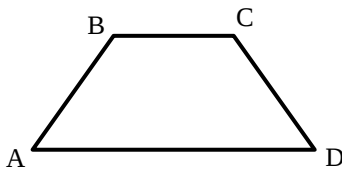


**(12)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\alpha$ ,  $\beta$  את הווקטור  $\overrightarrow{PQ}$ .

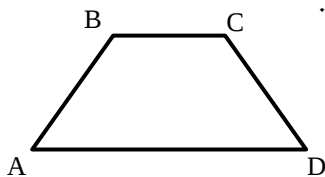


**(13)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים  $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AB}$ .

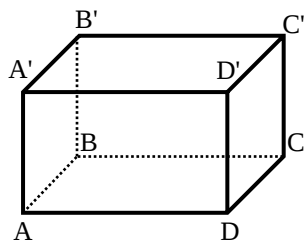


**(14)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים  $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$ .



**(15)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\alpha$ ,  $\beta$  את הווקטור  $\overrightarrow{PQ}$ .

ב. האם קיימים ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורם  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ ? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה  $ABB'A'$ .

מצא את ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  אם נתון כי  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$ .

## תשובות סופיות:

$$\underline{u} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}, \underline{u} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \underline{w} = \overrightarrow{AS} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overrightarrow{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overrightarrow{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overrightarrow{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \underline{u}, \overrightarrow{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overrightarrow{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

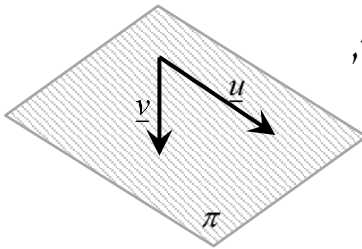
$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \text{א.} \quad \overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

## ווקטורים הפורשים מישור:

### סיכום כללי:

#### ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור  $\pi$ .

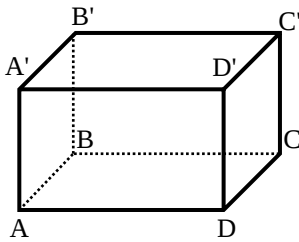
#### קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור  $\underline{w}$  המוכל, או מקביל למישור  $\pi$  באופן הבא:  $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$  כאשר:  $\alpha, \beta$  מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים  $\underline{u}, \underline{v}$  ו- $\underline{w}$  נקראים תלויים ליניארית.

## שאלות:



16) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ .

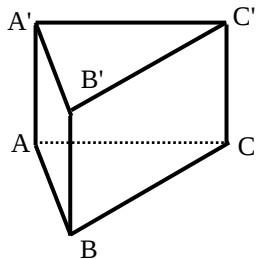
הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\alpha$ ,  $\beta$  את הווקטור  $\overrightarrow{PQ}$ .

ב. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הווקטור  $\overrightarrow{PQ}$  מקביל לפאה  $ADD'A'$ ?

ג. האם קיים ערך של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overrightarrow{PQ}$  מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת  $ABCA'B'C'$

ובה נתון:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ .

הנקודה M נמצאת על המקצוע  $A'C'$  ומקיימת:  $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

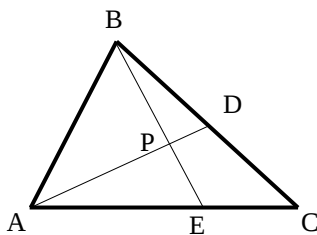
והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\alpha$ ,  $\beta$  את הווקטור  $\overrightarrow{NM}$ .

ב. מהו ערכו של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overrightarrow{NM}$  מקביל לפאה  $ACC'A'$ ?

ג. נתון כי הווקטור  $\overrightarrow{NM}$  מקביל לפאה  $ABB'A'$ .

הבע את  $\alpha$  באמצעות  $\beta$ .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

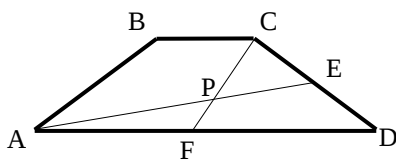
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים:  $\frac{AE}{CE} = 2$ .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ , וכן:  $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $t$  ו- $s$  את הווקטור  $\overrightarrow{AP}$  בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



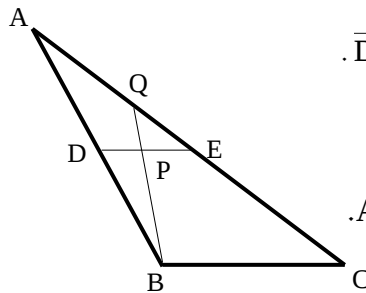
(19) בטרפז  $ABCD$ ,  $(AD \parallel BC)$  שבשרטוט נתון:  $AD = 3BC$ .

הנקודה  $E$  נמצאת באמצע הצלע  $CD$

והנקודה  $F$  נמצאת באמצע הצלע  $AD$ .

הנקודה  $P$  היא מפגש הקטעים  $AE$  ו- $CF$ .

מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את הקטע  $AE$  ואת הקטע  $CF$ .



(20) במשולש  $ABC$  הנקודה  $D$  היא אמצע הצלע  $AB$

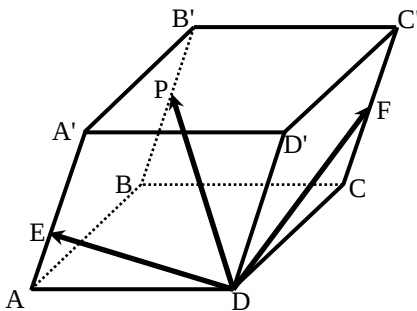
והנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AC$  כך שמתקיים:  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .

הנקודה  $P$  היא אמצע הקטע  $DE$  והמשך הקטע  $BP$

חותך את הצלע  $AC$  בנקודה  $Q$ .

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $Q$  את הצלע  $AC$ .

ב. חשב את היחס:  $\frac{S_{AQPE}}{S_{ADPB}}$ .



(21) במקבילון  $ABCD A'B'C'D'$

נתון:  $\overline{DA} = \underline{u}$ ,  $\overline{DC} = \underline{v}$ ,  $\overline{DD'} = \underline{w}$ .

הנקודה  $F$  נמצאת באמצע המקצוע  $CC'$ ,

הנקודה  $E$  נמצאת על המקצוע  $AA'$

ומקיימת:  $A'E = 2AE$  והנקודה  $P$  נמצאת על

המקצוע  $BB'$  ומקיימת:  $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$ .

נתון:  $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $k$  את הווקטור  $\overline{DP}$ .

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את המקצוע  $BB'$ .

ג. האם הנקודות  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ו- $P$  נמצאות על אותו מישור? נמק.

## תשובות סופיות:

$$\begin{aligned}
 & \text{א. } \overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{ב. } \alpha=1 \quad \text{ג. לא.} \quad (16) \\
 & \text{א. } \overrightarrow{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{ב. } \beta=1 \quad \text{ג. } \alpha = \frac{\beta}{1-\beta} \quad (17) \\
 & \text{א. } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \quad \overrightarrow{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{ב. } BP:PE=3:2, AP:PD=4:1 \quad (18) \\
 & AP:PE=2:1, CP:PF=2:1 \quad (19) \\
 & \text{א. } AQ:QC=1:2 \quad \text{ב. } \frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3} \quad (20) \\
 & \text{א. } \overrightarrow{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad \text{ב. } BP:PB=1:5 \quad \text{ג. כן.} \quad (21)
 \end{aligned}$$

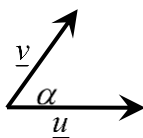
## מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

### סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

גודל של ווקטור נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$ , או:  $|\underline{u}|^2 = u^2$

### הערה:

המכפלה הסקלרית  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

### שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

- |                                                                        |                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| א. $\alpha = 60^\circ$ , $ \underline{v}  = 2$ , $ \underline{u}  = 3$ | ב. $\alpha = 120^\circ$ , $ \underline{v}  = 5$ , $ \underline{u}  = 4$ |
| ג. $\alpha = 30^\circ$ , $ \underline{v}  = 6$ , $ \underline{u}  = 2$ | ד. $\alpha = 180^\circ$ , $ \underline{v}  = 3$ , $ \underline{u}  = 8$ |
| ה. $\alpha = 0^\circ$ , $ \underline{v}  = 5$ , $ \underline{u}  = 3$  | ו. $\alpha = 90^\circ$ , $ \underline{v}  = 4$ , $ \underline{u}  = 7$  |

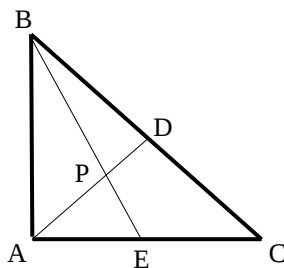
23) חשב את הזווית בין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

- |                                                                                            |                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$ , $ \underline{v}  = 4$ , $ \underline{u}  = 3$ | ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$ , $ \underline{v}  = 2$ , $ \underline{u}  = 4$ |
| ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ , $ \underline{v}  = 5$ , $ \underline{u}  = 9$ | ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$ , $ \underline{v}  = 6$ , $ \underline{u}  = 2$         |

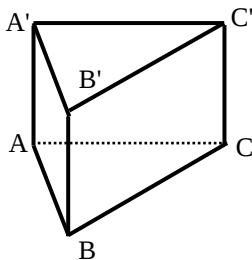
- (24) נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overrightarrow{PQ}$  שמוגדר:  $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .

- (25) נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  המאונכים זה לזה שאורכם:  $|\underline{u}|=4$ ,  $|\underline{v}|=5$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overrightarrow{MN}$  שמוגדר:  $\overrightarrow{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$ .

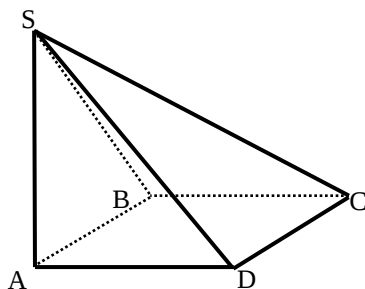
- (26) נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודל הזווית  $\angle QPM$  אם נתון:  $\overrightarrow{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .



- (27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ( $\angle BAC = 90^\circ$ ).  
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.  
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.  
נתון:  $AC = 12$ ,  $AB = 8$ ,  $\frac{AP}{PD} = 3$ .  
חשב את גודל הזווית  $\angle DPC$ .

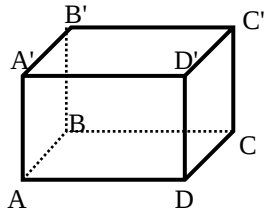


- (28) נתונה מנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.  
הנקודה M היא אמצע המקצוע  $A'C'$  והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $BN = 2CN$ .  
נסמן:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ .  
חשב את גודל הזווית  $\angle MAN$ .



- (29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.  
נתון:  $AB = AD = \frac{1}{2}AS = k$ .  
נסמן:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$ .  
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.  
חשב את גודל הזווית  $\angle PAQ$ .

(30) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AD} = \overline{AA'}$ ,  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .



הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע  $DD'$ .

א. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $|\overline{AP}| = \frac{5}{6} |\overline{AQ}|$ ?

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $\cos \angle PAQ$

והראה כי לכל ערך של  $\alpha$  הזווית  $\angle PAQ$  חדה.

ג. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הזווית  $\angle PAQ$  מקיימת:  $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$ ?

(31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים:  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

(32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים:  $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$

(33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $S_{ABCD} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$

(34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

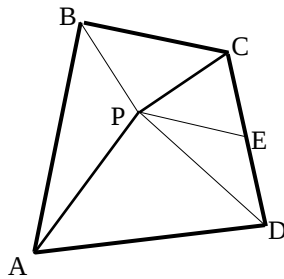
(35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה  $\overline{AS} \perp \overline{BC}$  ו-  $\overline{BS} \perp \overline{AC}$ .

הוכח:  $\overline{CS} \perp \overline{AB}$

(36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

(37) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.  
הוכח:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$ .
- ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.  
הוכח:  $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$ .
- ג. נתון בנוסף כי  $\vec{AS}$  ו- $\vec{AP}$  מאונכים ל- $\vec{BC}$ .  
הוכח כי  $AB = AC$ . (הדרכה: סמן  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ ).



- (38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD  
כך שהמשולשים BPC ו-APD הם משולשים  
ישרי זווית וש"ש ( $AP = PD$ ,  $BP = PC$ ).  
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח:  $\vec{PE} \perp \vec{AB}$ .  
(הדרכה: סמן  $\vec{PB} = \underline{a}$ ,  $\vec{PC} = \underline{b}$ ,  $\vec{PA} = \underline{c}$ ,  $\vec{PD} = \underline{d}$ ).

- (39) בטראזר SABC נתון:  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ .  
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת:  $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$ .  
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת:  $\vec{SQ} = \beta(\vec{SB} + \vec{SC})$ .
- א. מצא את הקשר בין  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורו  $\vec{PQ}$  מקביל למישור ABC.
- ב. נתון:  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ . הוכח:  $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$ . הוכח:  $AB = AC$ .

(40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

**תשובות סופיות:**

- (22) א. 3    ב. -10    ג.  $6\sqrt{3}$     ד. -24    ה. 15    ו. 0.
- (23) א.  $60^\circ$     ב.  $150^\circ$     ג.  $90^\circ$     ד.  $0^\circ$
- (24)  $|\overline{PQ}| = 18.248$
- (25)  $|\overline{MN}| = \sqrt{29}$
- (26)  $31.87^\circ$
- (27)  $55.49^\circ$
- (28)  $70.623^\circ$
- (29)  $24.095^\circ$
- (30) א.  $\alpha = \frac{3}{4}$     ב.  $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$     ג.  $\alpha = \frac{1}{2}$
- (31) שאלת הוכחה.
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) שאלת הוכחה.
- (36) שאלת הוכחה.
- (37) שאלת הוכחה.
- (38) שאלת הוכחה.
- (39) א.  $\alpha + 2\beta = 1$     ב. שאלת הוכחה.
- (40) שאלת הוכחה.